

РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$, одредити $f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, одредити $f(f(1)) - f(f(-1))$.
3. Ако су функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 3x - 1$, одредити $f(g(x)) - g(f(x))$.
4. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \frac{1}{1-x}$, одредити функцију $h(x) = (f \circ f \circ f)(x)$.
5. Ако су функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^4 + 3$, одредити $f(g(f(f(x))))$.
6. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ дата са $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$, одредити њену инверзну функцију.
7. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow [1, \sqrt{2}]$ дата са $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})$, одредити њену инверзну функцију.
8. Ако је $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x - 1$ и $g\left(\frac{x-1}{2}\right) = x + 1$, одредити $(f^{-1} \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$.
9. Ако је $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ функција таква да за свако $x > 0$ важи

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x,$$

одредити $f(6)$.

10. Одредити које од следећих функција f_1, f_2, f_3, f_4 , дефинисаних са $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x) = \ln e^{\frac{1}{|x|}}$, $f_3(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^3}}$, $f_4(x) = \frac{1}{|x|}$, су међусобно једнаке.
11. Дате су функције $f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f_2(x) = e^{\ln \frac{x-1}{x}}$, $f_3(x) = \frac{(x-1)x}{x^2}$, $f_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$, $f_5(x) = \ln e^{\frac{x-1}{x}}$. Одредити које од наведених функција су једнаке функцији $f(x) = \frac{x-1}{x}$.
12. Одредити домене следећих функција:
 - (а) $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \sqrt{x}$;
 - (б) $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \sqrt{2-x}$;
 - (в) $f(x) = (3-|x|)^{-\frac{1}{2}}$;
 - (г) $f(x) = \log(6+x-x^2)$.
13. Одредити област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4-3x-x^2}$.
14. Одредити број реалних нула функције $f(x) = \frac{(x^2-5x+6)\ln(x-4)}{x-2+|x-2|}$.

Низови

1. Збир другог и десетог члана опадајуће аритметичке прогресије је 8, а производ тих чланова је 12. Одредити збир првих 15 чланова те прогресије.
2. Збир прва три члана аритметичке прогресије је 42, а збир првих шест чланова је 48. Одредити S_{10} .
3. Збир првог и седмог члана аритметичке прогресије је 7. Одредити збир трећег и петог члана те прогресије.
4. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да је разлика свака два узастопна броја иста. Одредити збир тих 17 бројева.
5. У аритметичком низу је $a_n = m$ и $a_m = n$, $n \neq m$. Одредити a_p .
6. Одредити збир првих 100 природних бројева који при дељењу са 5 дају остатак 1.
7. За које вредности x бројеви $\log 2$, $\log(2x - 1)$ и $\log(2x + 3)$ чине аритметички низ?
8. У геометријској прогресији количник је 2, а збир првих седам чланова једнак је 635. Одредити a_7 .
9. У геометријском низу збир првог и петог члана је 51, а збир другог и шестог члана је 102. Ако је збир првих n чланова 3069, одредити n .
10. Збир свих чланова бесконачног геометријског низа $2a + a\sqrt{2} + a + \dots$ једнак је 8. Одредити број a .
11. За $x = \frac{\pi}{3}$ одредити збир $1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \dots$.
12. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним позицијама је 85, а збир чланова на парним позицијама је 170. Одредити количник те прогресије.
13. Нека су a_1, a_2, a_3, a_4 узастопни чланови растућег аритметичког низа, а b_1, b_2, b_3, b_4 узастопни чланови геометријског низа. Ако је $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2$, $b_3 - a_3 = 1$, одредити $b_4 - a_4$.
14. Бројеви a, b и c су узастопни чланови растућег аритметичког низа, а бројеви $a, b, c+1$ су узастопни чланови геометријског низа. Одредити вредност израза $a^2 + b^2 + c^2$, ако је $a + b + c = 18$.
15. Збир три броја је 14. Ако се средњи повећа за 1, добија се аритметички низ, а ако се средњи смањи за 1, добија се геометријски низ. Одредити те бројеве.
16. Странице правоуглог троугла образују растући геометријски низ, а једна катета једнака је 2. Одредити обим троугла.